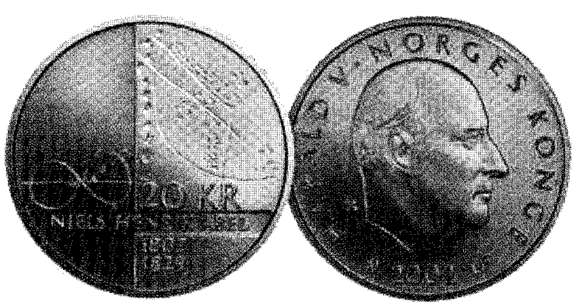
Utdanningsdirektoratet

Eksamen

22.05.2009

REA3022 Matematikk R1



Nynorsk/Bokmål

Del 1

Oppgave 1

a) Deriver funksjonene:

1) $f(x) = (x^2 + 1)^4$

2) $g(x) = x \cdot e^{2x}$

b) Regn ut grenseverdien hvis den eksisterer

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2x}{x - 2}$$

c) Trekk sammen

$$\frac{x-2}{x^2+2x} - \frac{x+2}{x^2-2x} - \frac{4x}{x^2-4}$$

d) Gitt punktene $A(-2, -1)$, $B(5, 4)$ og $C(4, 7)$.

1) Bestem $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{BC}$.

2) Undersøk om noen av vektorene står vinkelrett på hverandre.

e) Gitt polynomfunksjonen $f(x) = 2x^3 + 8x^2 + 2x - 12$.

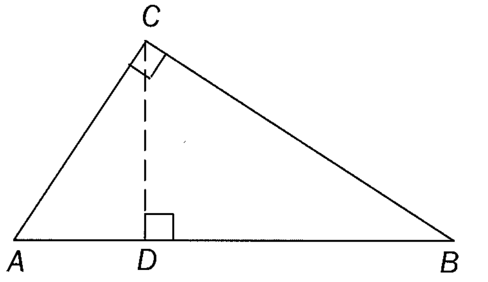
1) Regn ut $f(1)$. Faktoriser $f(x)$.

2) Løs ulikheten $f(x) \leq 0$.

f) Skriv så enkelt som mulig

$$\lg\left(\frac{1}{a^2}\right) + 3 \cdot \lg a$$

Oppgave 2



I denne oppgaven skal du bevise Pytagoras' setning. På figuren ovenfor har vi tegnet en trekant ABC der $\angle C = 90^\circ$. Fotpunktet for høyden fra hjørnet C til siden AB kalles D.

a) Forklar at ΔABC, ΔACD og ΔCBD er formlike.

b) Bruk a) til å vise at $AC^2 = AB \cdot AD$ og at $BC^2 = AB \cdot DB$.

c) Bruk b) til å bevise Pytagoras' setning.

Del 2

Oppgave 3

a) I en trekant ABC er $AB = 10$ cm, $AC = 7$ cm og $\angle C = 90^\circ$.

1) Bruk passer og linjal eller dynamisk programvare til å konstruere trekanten ABC.

2) Konstruer den innskrevne sirkelen i trekanten.

b) Finn den eksakte løsningen til likningen ved regning

$$(\ln x)^2 + \ln x^2 = 3$$

c) En bedrift produserer mobiltelefoner. Avdeling A står for 70 % av produksjonen, og avdeling B står for de resterende 30 %. Det har vist seg at 5 % av produksjonen fra avdeling A har feil, mens 10 % av produksjonen fra B har feil.

1) Finn sannsynligheten for at en tilfeldig valgt telefon har feil.

2) Hva er sannsynligheten for at en telefon som har feil, er produsert i avdeling A?

Oppgave 4

Du skal besvare enten alternativ I eller alternativ II.
De to alternativene er likeverdige ved vurderingen.

(Dersom besvarelsen inneholder deler av begge,
vil bare det du har skrevet på alternativ I, bli vurdert.)

Alternativ I

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx - 11$.

Grafen til funksjonen f har et bunnpunkt i $(-1, -16)$.

a) Vis at $a = 3$ og $b = 9$.

b) Finn $f'(x)$, og bruk denne til å tegne fortegnslinja for $f'(x)$. Bruk fortegnslinja til å finne ut hvor grafen stiger og hvor den synker. Hva blir koordinatene til eventuelle toppunkter på grafen til f?

c) Finn $f''(x)$, og bruk denne til å tegne fortegnslinja for $f''(x)$. Bruk fortegnslinja til å finne eventuelle vendepunkter på grafen til f.

d) Finn likningene for tangentene med stigningstall 9.

e) Tegn grafen til f. Bruk grafen og resultatene i d) til å avgjøre for hvilke verdier av b likningen $f(x) = 9x + b$ har tre forskjellige løsninger.

Alternativ II

I deler av denne oppgaven er det en fordel å bruke digitalt verktøy.

I denne oppgaven skal du studere fjerdegradsfunksjoner som har to vendepunkter.

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = \frac{1}{12}\left(x^4 - 2x^3 - 12x^2\right)$.
La S og T være de to vendepunktene, med S lengst til venstre på grafen.

a) Tegn grafen til f.

b) Finn $f''(x)$ og tegn fortegnslinja for denne. Bestem koordinatene til vendepunktene S og T.

c) Finn likningen for den rette linja gjennom punktene S og T. Bestem koordinatene til de to andre skjæringspunktene mellom grafen til f og linja. Bruk gjerne digitalt verktøy.

d) Vi lar Q være skjæringspunktet lengst til høyre. Regn ut $\frac{ST}{TQ}$.

En annen fjerdegradsfunksjon g er gitt ved $g(x) = x^4 - 6x^2$.
La S_1 og T_1 være de to vendepunktene, med S_1 lengst til venstre på grafen.

Du skal gjennomføre tilsvarende oppgaver som i a), b), c) og d):

e)

1) Tegn grafen til g.

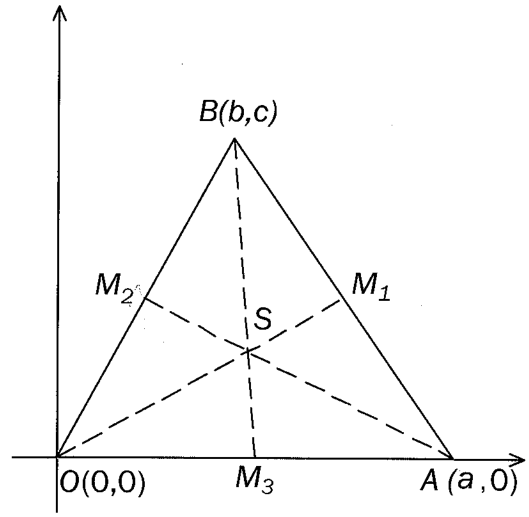
2) Finn $g''(x)$ og tegn fortegnslinja for denne. Bestem koordinatene til vendepunktene S_1 og T_1.

3) Finn likningen for den rette linja gjennom punktene S_1 og T_1. Bestem koordinatene til de to andre skjæringspunktene mellom grafen til g og linja. Bruk gjerne digitalt verktøy.

4) Vi lar Q_1 være skjæringspunktet lengst til høyre. Regn ut $\frac{S_1T_1}{T_1Q_1}$.

   Kommenter resultatet.

Oppgave 5



En vilkårlig trekant OAB settes inn i et koordinatsystem med siden OA langs x-aksen. Koordinatene til hjørnene er
$O(0,0)$, $A(a,0)$ og $B(b,c)$.

Medianene OM_1, AM_2 og BM_3 skjærer hverandre i S. Se figuren.

a) Vis at koordinatene til midtpunktene er
$M_1\left(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2}\right)$, $M_2\left(\frac{b}{2},\frac{c}{2}\right)$ og $M_3\left(\frac{a}{2},0\right)$

b) Forklar at det finnes tall x og y slik at
$\overrightarrow{OS}=x\cdot\overrightarrow{OM_1}$ og $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+y\cdot\overrightarrow{AM_2}$

c) Vis at spørsmål b) gir oss likningssettet
$x\cdot\frac{a+b}{2}=a+y\cdot\left(\frac{b}{2}-a\right)$ og $x\cdot\frac{c}{2}=y\cdot\frac{c}{2}$

Finn x og y.

d) Forklar at koordinatene til skjæringspunktet mellom medianene er $S\left(\frac{a+b}{3},\frac{c}{3}\right)$

e) Bestem forholdene
$\frac{|\overrightarrow{OS}|}{|\overrightarrow{OM_1}|}$, $\frac{|\overrightarrow{AS}|}{|\overrightarrow{AM_2}|}$ og $\frac{|\overrightarrow{BS}|}{|\overrightarrow{BM_3}|}$

Kommenter.

f) Bestem koordinatene til punktet B i det tilfellet at $O(0,0)$, $A(6,0)$ og $S(1,4)$.